

Wärmeleitung beim Erstarren geometrisch einfacher Körper Heat Conduction in Solidification of Geometrically Simple Bodies

K. STEPHAN und B. HOLZKNECHT, Bochum

Zusammenfassung. Die Erstarrung vor einer ebenen Platte sowie an der Innen- und Außenseite eines Zylinders und einer Kugel wurde numerisch berechnet und in Diagrammen systematisch zusammengestellt. Aus diesen kann man die Erstarrungszeiten für Kühlung bei endlichem Wärmeübergang, konstanter Temperatur oder konstantem Wärmestrom bestimmen. Ein Vergleich mit bekannten Näherungslösungen zeigt, daß diese nur in bestimmten Bereichen der maßgebenden Kennzahlen zu brauchbaren Ergebnissen führen.

Abstract. The solidification on a flat plate as well as on the inside and outside of a cylindrical and a spherical container was numerically calculated and is presented systematically in diagrams. The diagrams show the solidification times for finite heat transfer between the solidified layer and the coolant, constant wall temperature, and constant heat transfer rates. A comparison with known approximations proves, that these yield useful results only in limited ranges of the relevant dimensionless parameters.

1. Aufgabe

Vorgänge des Erstarrens sind bekanntlich für die Konservierung von Lebensmitteln durch Gefrieren, die Formgebung von Metallen, Gefriergründungen im Schachtbau, die Stofftrennung durch Ausfrieren aus einem Flüssigkeitsgemisch und für viele andere Bereiche der Technik von Bedeutung. Obwohl hierbei die erstarrenden Körper von unterschiedlicher Gestalt sind, kann man sie häufig durch einfache geometrische Formen, wie ebene Platte, Zylinder, Kugel, Hohlzylinder oder Hohlkugel, annähern oder sich kompliziertere Gebilde aus diesen einfachen Körpern aufgebaut denken.

Im Folgenden sollen Erstarrungsgeschwindigkeiten und -zeiten solcher einfacher geometrischer Körper ermittelt werden für die am häufigsten vorkommenden Arten der Wärmeabfuhr: endlicher Wärmeübergang zwischen dem sich bildenden Festkörper und dem Kühlmittel, konstante Temperatur oder konstante Wärmestromdichte an der Kühlwand.

Die Berechnung der Erstarrungsgeschwindigkeiten und -zeiten wird dadurch erschwert, daß sich die geometrische Form des Festkörpers ständig ändert, wodurch ein Wärmeleitproblem mit variablem Integrationsbereich entsteht, für das nur in wenigen Sonderfällen exakte analytische Lösungen möglich sind [1].

2. Bisherige Arbeiten

Bereits vor mehr als hundert Jahren hat Neumann für die Erstarrung einer auf Schmelztemperatur befindlichen Flüssigkeit vor einer ebenen Wand konstanter Temperatur eine analytische Lösung gefunden. Wie Lightfoot [2] später feststellte, kann man die Neumannsche Lösung nicht auf andere Körper und andere Arten der Wärmeabfuhr übertragen. Man ist daher auf

numerische Lösungen oder analytische Näherungsmethoden angewiesen. So hat Siegel [3] für zweidimensionale Probleme die stationäre Form des erstarrenden Körpers mit Hilfe von konformen Abbildungen zu ermitteln versucht.

Beaubouef und Chapman [4] haben die Erstarrung einer unendlich ausgedehnten ebenen Flüssigkeitsschicht numerisch berechnet und dabei einen konstanten Wärmestrom von der Flüssigkeit an die erstarrende Schicht zugelassen. Mit Hilfe eines Differenzenverfahrens ermittelte Tao [5] die Erstarrungsgeschwindigkeiten und -zeiten zylindrischer und kugelförmiger Körper, deren flüssige Phase Erstarrungstemperatur besitzt. Diese Rechnungen hat Stein [6] erweitert in der Annahme, die kugelförmige Flüssigkeitsmasse besitze anfänglich eine örtlich veränderliche Temperatur und der Wärmeübergang an der Kugeloberfläche sei eine Funktion der Zeit. Weitere numerische Rechnungen für verschiedene geometrische Gebilde und unterschiedliche Randbedingungen findet man im Schrifttum [7, 8, 9, 23]. Eine Übersicht über numerische Lösungen und analytische Näherungen gibt Stephan [10].

Unter den analytischen Näherungslösungen führt die sogenannte quasistationäre Näherung, welche die in der festen Phase gespeicherte Energie gegenüber der Erstarrungsenthalpie vernachlässigt, auf besonders einfache Ergebnisse für die Erstarrungszeit und -geschwindigkeit. Sie gilt jedoch nur für Stoffe wie Wasser und wässrige Lösungen, während sie für andere, beispielsweise Metalle, zu großen Fehlern führt. Ein Näherungsverfahren von Megerlin [11] geht von einem Polynom für die Temperatur in der festen Phase aus. Die Koeffizientenfunktionen des Polynoms erfüllen alle Randbedingungen, befriedigen die Wärmeleitgleichung jedoch nur an der Phasengrenze. Dieses Verfahren hat Stephan [10] erwei-

tert und auf die Erstarrung von Strömungen entlang einer ebenen Wand und in Rohren angewendet. Ebenfalls auf einem Polynomansatz für die Temperatur (Parabel) beruht ein Näherungsverfahren von Stephan [12] für die Erstarrung zylindrischer und kugelförmiger Körper, das wenig später auch von Stein [13] angegeben wurde. Nach Transformationsregeln von Lin [14] kann man aus den Erstarrungsgeschwindigkeiten ebener plattenförmiger Körper diejenigen für zylinder- und kugelförmige Körper ermitteln. Diese Formeln gelten jedoch nur näherungsweise, wie später nachgewiesen wurde [10, 12]. Siegel et al. [15] verglichen Näherungsverfahren, die auf der Integralmethode von Goodman [16] beruhen, und erweiterten diese auf die Erstarrung vor einer dicken Platte [17] unter Berücksichtigung der in der Platte gespeicherten inneren Energie.

3. Mathematische Formulierung

Die Erstarrung vor einer Platte oder an der Innen- und Außenseite eines Zylinders oder einer Kugel läßt sich bei geometrisch eindimensionaler Wärmeleitung durch ein einheitliches Gleichungssystem beschreiben. Nach Bild 1 sei der Ursprung der Längskoordinate x die Achse eines zylindrischen Rohres, der Mittelpunkt einer Kugel oder im Fall der ebenen Platte ein beliebiger Koordinatenursprung. Die Flüssigkeit soll entweder im Inneren des Rohres erstarren, wenn von außen gekühlt wird, oder es soll sich, wie die untere Skizze in Bild 1 zeigt, eine feste Schicht um das Rohr bilden, wenn sich im Inneren des Rohres ein Kühlmittel befindet. Die Koordinate x_0 sei bei der Erstarrung im Inneren des Rohres der Innenradius, bei der Erstarrung an der Außenseite der Außenradius. Diese Bezeichnungen gelten sinngemäß auch für die Kugel.

Zur Zeit $t = 0$ beginnt sich die feste Phase mit der Oberfläche ξ in die Flüssigkeit der Erstarrungstempera-

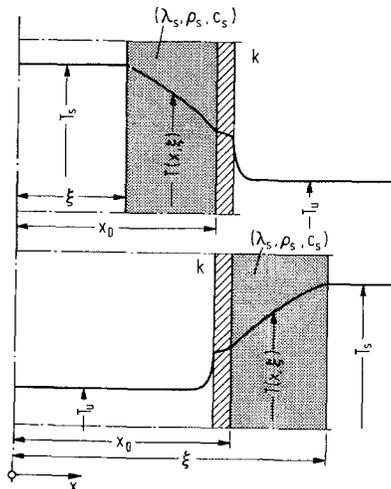


Bild 1. Temperaturen bei der Erstarrung an der Innen- und Außenseite eines Zylinders. Endlicher Wärmeübergang

tur T_s hineinzubewegen. Die Dicke $|\xi - x_0|$ der festen Phase und die Erstarrungsgeschwindigkeit $d\xi/dt$ sind Funktionen der Zeit t .

Für die feste Phase gilt

$$\partial T/\partial t = a_s(\partial^2 T/\partial x^2 + n/x \cdot \partial T/\partial x) \tag{1}$$

mit der Temperaturleitfähigkeit $a_s = \lambda_s/\rho_s c_s$

und $n = 0$ für die ebene Platte,

$n = 1$ für den Zylinder oder

$n = 2$ für die Kugel.

Die Wärmeleitfähigkeit λ_s , die Dichte ρ_s und die spezifische Wärmekapazität c_s wurden für die numerische Rechnung als konstant vorausgesetzt, können jedoch ohne zusätzliche Schwierigkeit auch als temperaturabhängig angenommen werden. Es gelten die folgenden Randbedingungen:

An der Oberfläche $x = \xi$ herrscht Erstarrungstemperatur $T = T_s$. (2)

An der Kühlwand $x = x_0$ sollen folgende Randbedingungen zugelassen werden:

konstante Wandtemperatur $T = T_u$, (3a)

konstante Wärmestromdichte $\lambda \partial T/\partial x = \pm q$ oder (3b)

endlicher Wärmeübergang $\lambda \partial T/\partial x = \pm k(T - T_u)$, (3c)

mit positiven Vorzeichen für Erstarrung an der Außenseite ($\xi > x_0$) und negativen Vorzeichen für Erstarrung an der Innenseite ($\xi < x_0$).

Die Randbedingung Gl. (3a) ergibt sich bekanntlich als Grenzfall $k \rightarrow \infty$ aus Gl. (3c). Der Wärmedurchgangskoeffizient k enthält den Wärmeübergangswiderstand und den Wärmeleitwiderstand der Kühlwand. Als weitere Bedingung gilt die Energiebilanz an der Phasengrenze ξ

$$x = \xi : \rho_s h_s d\xi/dt = \lambda_s \partial T/\partial x \tag{4}$$

mit der Anfangsbedingung

$$t = 0 : \xi = x_0 . \tag{5}$$

Um die Zahl der Einflußgrößen zu verringern, führt man dimensionslose Größen ein:

$$\vartheta = (T - T_u)/(T_s - T_u) ,$$

$$\tau = \lambda_s (T_s - T_u) t/\rho_s h_s x_0^2 , X = x/x_0 , \xi^* = \xi/x_0$$

sowie die Biot-Zahl $Bi = k x_0/\lambda_s$, die Phasenübergangszahl $Ph = h_s/c_s (T_s - T_u)$ und die dimensionslose Wärmestromdichte $Qu = x_0 q/\lambda_s (T_s - T_u)$.

Die Gln. (1) bis (5) gehen damit über in:

$$1/Ph \cdot \partial \vartheta / \partial \tau = \partial^2 \vartheta / \partial X^2 + n/X \cdot \partial \vartheta / \partial X, \quad (6)$$

$$X = \xi^* : \vartheta = 1, \quad (7)$$

$$X = 1 : \vartheta = 0, \quad (8a)$$

$$\partial \vartheta / \partial X = \pm Qu, \quad (8b)$$

$$\partial \vartheta / \partial X = \pm Bi \cdot \vartheta, \quad (8c)$$

$$X = \xi^* : d\xi^*/d\tau = \partial \vartheta / \partial X, \quad (9)$$

$$\tau = 0 : \xi^* = 1. \quad (10)$$

4. Numerische Lösung

Zur Lösung der partiellen Dgl. (6) wurde das Differenzenverfahren nach Crank-Nicolson verwendet, während die gewöhnliche Dgl. (9) nach dem Verfahren nach Runge-Kutta gelöst wurde.

Das Crank-Nicolson-Verfahren [18, 19] wurde von karthesischen auf Zylinder- und Kugelkoordinaten entsprechend erweitert. Überträgt man es auf ein Problem mit variablem Rand, so enthält die Differenzenapproximation der Wärmeleitgleichung (6) für den letzten Stützpunkt vor der Oberfläche ξ^* Differenzausdrücke mit nicht äquidistanten Stützstellen, da als äußerster Stützwert die aus der Randbedingung (7) bekannte Oberflächentemperatur verwendet wird. Diese Differenzausdrücke wurden gemäß der Methode für die Ableitung von „Finiten Ausdrücken“ nach Collatz [20, S. 161] hergeleitet. Wegen der mit der Erstarrungszeit zunehmenden Schichtdicke werden im Verlauf der Rechnung an der Oberfläche neue Stützstellen hinzugenommen, und zwar dann, wenn der Abstand der Oberfläche ξ^* von der äußersten Stützstelle das 1,5fache einer Schrittweite überschreitet. Die Temperatur an dieser neuen Stützstelle wird extrapoliert. Das aus der Diskretisierung der Gln. (6) bis (8) entstehende lineare Gleichungssystem wird auf tridiagonale Form gebracht und nach der Methode von Thomas [19, S. 254] gelöst.

Zur Lösung der Energiebilanz (9) wird das Temperaturprofil aus dem Differenzenverfahren verwendet. Das Runge-Kutta-Verfahren zur Lösung von Gl. (9) ermöglicht die Änderung der Zeitschrittweite mittels der Schrittkenzahl [21], was sich bei Erstarrungsvorgängen mit $\xi^* > 1$ wegen der stetig abnehmenden Krümmung der Kurve $\tau(\xi^*)$ und bei Erstarrungsvorgängen mit $\xi^* < 1$ wegen der starken Zunahme der Krümmung bei $\xi^* \approx 0$ als zweckmäßig erwies.

Für den Beginn des Differenzenverfahrens muß eine endliche Schichtdicke vorgegeben werden, die gleich der 1,5fachen Schrittweite gewählt wurde. Die hierzu gehörenden Anfangswerte für Erstarrungszeit und -geschwindigkeit wurden nach den Näherungsformeln von Megerlin [11] berechnet.

4.1 Stabilität und Diskretisierungsfehler

Das Crank-Nicolson-Verfahren ist in karthesischen Koordinaten für alle Werte $r = Ph \cdot \Delta \tau / (\Delta X)^2 > 0$ stabil, solange das Problem linear ist, eine Bedingung, die im vorliegenden Fall nicht erfüllt ist. Hier ergab die Rechnung für $n = 0, 1, 2$ Stabilität bis zu einer oberen Grenze von $r \approx 500$. Um numerische Instabilitäten zu vermeiden, wurde r deshalb auf $0 < r \leq 280$ begrenzt. Das gewählte Verfahren ist somit dem expliziten Verfahren, für das $r \leq 0,5$ sein muß, überlegen, da es sehr viel größere Zeitschritte erlaubt.

Eine Abschätzung des Diskretisierungsfehlers in Ortsrichtung erhält man, wenn man die Erstarrungszeit für einen Körper vorgegebener Schichtdicke mit veränderlichem Ortsschritt ΔX berechnet und anschließend über ΔX aufträgt. Für $\Delta X \rightarrow 0$ gehen die Differenzenquotienten in Ortsrichtung in die Differentialquotienten über. Wird die Kurve also extrapoliert auf $\Delta X \rightarrow 0$, so stellt der Unterschied zwischen der Erstarrungszeit bei endlichem ΔX und dem extrapolierten Wert den Diskretisierungsfehler in Ortsrichtung dar. Eine Anwendung dieses Verfahrens für die Erstarrung einer ebenen Platte, einer Kugel und einer Hohlkugel bei konstanter Temperatur der Kühlwand ($Bi \rightarrow \infty$), sowie für drei Werte der Phasenübergangszahl $Ph = 0,271, 2$ und 50 ergab bei Wahl von $\Delta X = 1/120$ Fehler in der Erstarrungszeit unter einer Schranke von 10^{-4} .

Vergleicht man weiterhin die numerische Lösung für den Fall der ebenen Wand und für eine Biot-Zahl $Bi \rightarrow \infty$ mit der exakten Neumann-Lösung, so ergibt sich ein Fehler in der Erstarrungszeit τ , der für alle Werte der Phasenübergangszahl Ph kleiner als $5 \cdot 10^{-5}$ ist und im Mittel annähernd $1 \cdot 10^{-5}$ beträgt.

5. Ergebnisse

Für die Erstarrung vor einer Platte ist die Bezugslänge x_0 beliebig wählbar. Wir setzen $x_0 = \lambda_s/k$. Gleichbedeutend damit ist die Wahl der Biotzahl $Bi = k x_0 / \lambda_s = 1$. Für endlichen Wärmeübergang erhält man dann die in Bild 2 dargestellte Erstarrungszeit $\tau(\xi^*, Ph, Bi = 1)$. Für die als Neumann-Lösung bekannte Erstarrung bei konstanter Wandtemperatur $k \rightarrow \infty$ verschwindet die Bezugslänge $x_0 \rightarrow 0$, wodurch die Koordinaten $\xi^* \rightarrow \infty$ und $\tau \rightarrow \infty$ gehen und damit nicht mehr in Bild 2 darstellbar sind. Die Neumann-Lösung ist deshalb gesondert im eingeblendeten Diagramm angegeben. Gibt man als Randbedingung konstante Wärmestromdichte vor, so wird die Temperatur T_u bedeutungslos, so daß sie außer der Koordinate x_0 ebenfalls beliebig wählbar ist. Setzt man $T_u = T_s - h_s/c_s$ und $x_0 = \lambda_s h_s / q c_s$, so wird $Qu = 1$ und $Ph = 1$, die Erstarrungszeit ist dann durch eine einzige Kurve $\tau(\xi^*, Ph = 1, Qu = 1)$ darstellbar (Bild 2). Damit man aus Bild 2 auch die Erstarrungszeit für sehr große Schichtdicken ablesen kann, ist eine zweite Kurve $Qu = 10, Ph = 1$ angegeben. Die Bezugs-

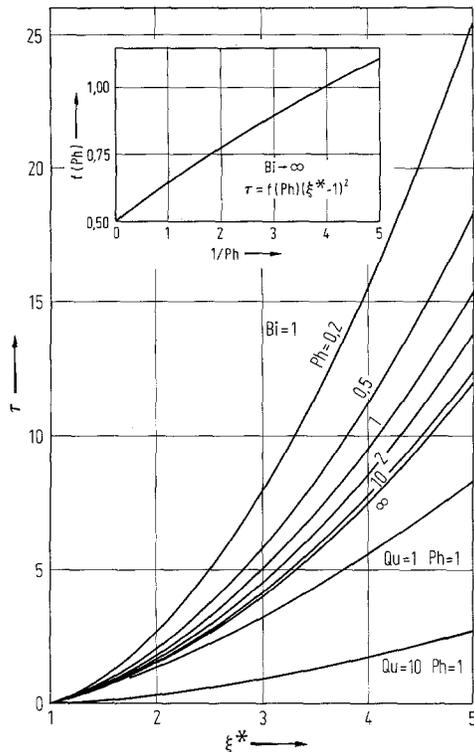


Bild 2. Erstarung vor einer Platte bei endlichem Wärmeübergang, konstanter Wandtemperatur und konstanter Wärmestromdichte

länge $x_0 = 10 \lambda_s h_s / q c_s$ ist hier um den Faktor 10 vergrößert und die dimensionslose Erstarrenszeit um den Faktor 100 verkleinert.

Die Erstarrenszeit eines Hohlzylinders und einer Hohlkugel bei endlichem Wärmeübergang zeigen die Bilder 3 und 5 für $Ph = 0,2$. Die Erstarrenskurven $\tau(\xi^*, Bi)$ für größere Werte Ph können nach der Interpolationsformel $\tau(Ph) = \omega \cdot \tau(Ph = 0,2) + (1 - \omega) \cdot \tau(Ph \rightarrow \infty)$ ermittelt werden. Der Faktor $\omega(Ph)$ ist dem eingeblendeten Diagramm, die quasistationäre Lösung $\tau(Ph \rightarrow \infty)$ hingegen Tabelle 1 zu entnehmen. Wie eine numerische Rechnung zeigte, kann man die Abhängigkeit des Faktors ω von der Biotzahl und der Koordinate ξ^* vernachlässigen, da der dadurch verursachte Fehler in der Erstarrenszeit unter 1% liegt. Die Bilder 4 und 6 zeigen die zugehörige Lösung mit der Randbedingung konstanter Wärmestromdichte. Es ist wiederum $T_u = T_s - h_s / c_s$ gewählt, so daß $Ph = 1$ ist.

Die Erstarrenszeiten zylindrischer und kugelförmiger Körper entnimmt man den Bildern 7 bis 9. Für endlichen Wärmeübergang hat Tao [5] hierfür bereits mit Hilfe eines expliziten Differenzenverfahrens eine numerische Lösung erarbeitet, die in Tabelle 2 mit den eigenen Ergebnissen verglichen ist. Im Mittel beträgt die Abweichung 2,7%, erreicht jedoch Werte bis zu 6,4%. Diese Abweichungen sind dadurch zu erklären, daß Tao mit einem um den Faktor drei größeren Ortschritt ΔX rechnete als er hier verwendet wurde; weiter-

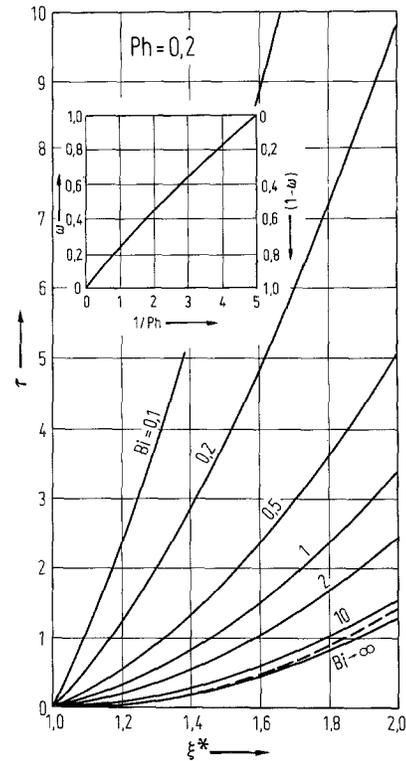


Bild 3. Erstarung um einen Zylinder bei endlichem Wärmeübergang und konstanter Wandtemperatur; unterbrochene Kurve: Näherung nach Lin für $Bi \rightarrow \infty$

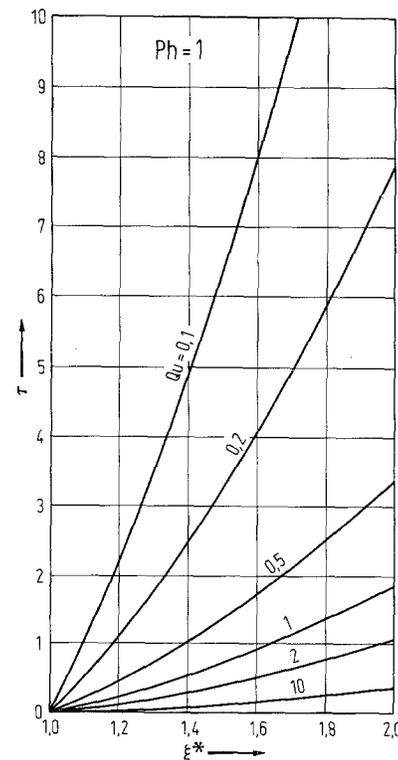


Bild 4. Erstarung um einen Zylinder bei konstanter Wärmestromdichte

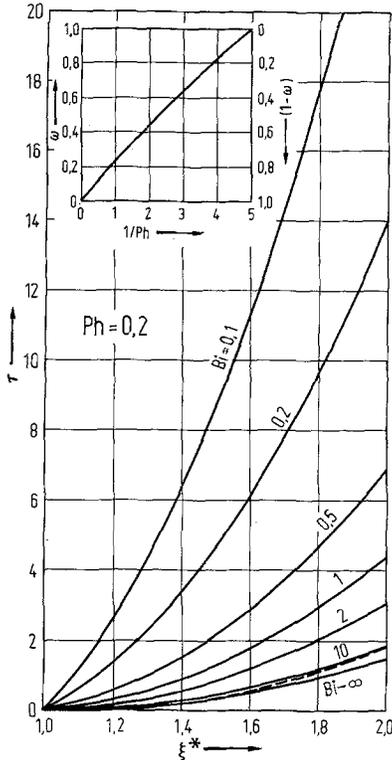


Bild 5. Erstarren um eine Kugel bei endlichem Wärmeübergang und konstanter Wandtemperatur; unterbrochene Kurve: Näherung nach Lin für $Bi \rightarrow \infty$

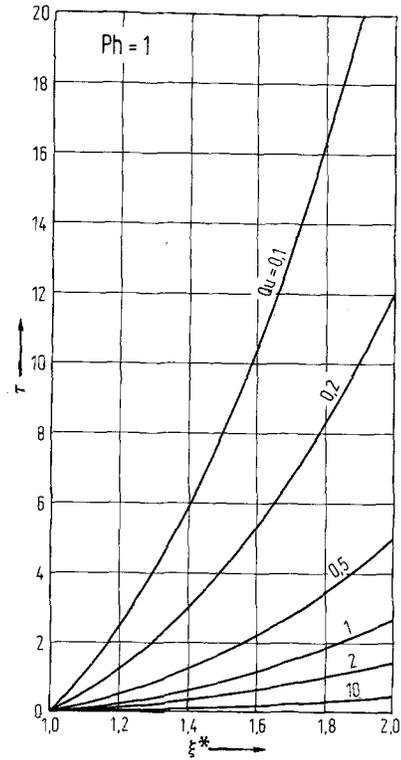


Bild 6. Erstarren um eine Kugel bei konstanter Wärmestromdichte

Tabelle 1. Quasistationäre Lösungen ($Ph \rightarrow \infty$)

	endlicher Wärmeübergang	konstante Wärmestromdichte
Platte	$\vartheta = \frac{1/Bi + X - 1}{1/Bi + \xi^* - 1}$ $\tau = (\xi^* - 1)^2/2 + (\xi^* - 1)/Bi$	$\vartheta = 1 + Qu (X - \xi^*)$ $\tau = (\xi^* - 1)/Qu$
Zylinder	$\vartheta = \frac{1/Bi + \ln X}{1/Bi + \ln \xi^*}$ $\tau = \xi^{*2} \ln \xi^*/2 + (1 - 2/Bi) \times \times (1 - \xi^{*2})/4$	$\vartheta = 1 + Qu \cdot \ln (X/\xi^*)$ $\tau = (\xi^{*2} - 1)/2 Qu$
Kugel	$\vartheta = \frac{1/Bi + 1 - 1/X}{1/Bi + 1 - 1/\xi^*}$ $\tau = (1 - \xi^{*2})/2 - (1 + 1/Bi) \times \times (1 - \xi^{*3})/3$	$\vartheta = 1 + Qu (1/\xi^* - 1/X)$ $\tau = (\xi^{*3} - 1)/3 Qu$

für $\xi^* > 1$ sind Bi und Qu mit pos. Vorzeichen einzusetzen

für $\xi^* < 1$ sind Bi und Qu mit neg. Vorzeichen einzusetzen

hin hat er die Energiebilanz an der Oberfläche (9) nach einem sehr groben graphischen Verfahren von Longwell [22] diskretisiert. Dadurch rückt die Oberfläche ξ^* jeweils diskontinuierlich um einen ganzen Ortsschritt ΔX vor, und anschließend wird jedesmal die Wärmeleitung in einer Schicht konstanter Dicke berechnet. Auch die Lösung von Pechoč [23], dessen Verfahren sich an das von Tao anlehnt, weicht von Taos Ergebnissen ab.

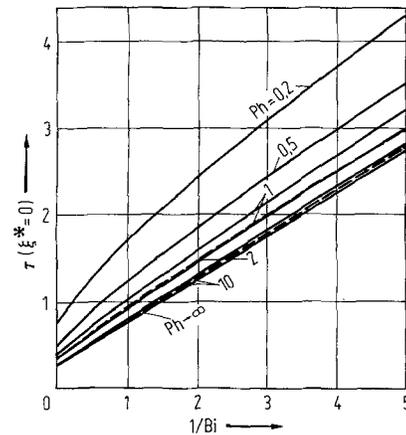


Bild 7. Erstarrenszeiten für einen zylindrischen Körper bei endlichem Wärmeübergang und konstanter Wandtemperatur unterbrochene Kurve: Näherung nach Stephan

Tabelle 2. Abweichung der numerischen Lösung von Tao [5] für die Erstarrungszeiten eines Zylinders und einer Kugel von der eigenen numerischen Rechnung (Fehler $< 10^{-4}$) in %

Bi	Ph	Zylinder	Kugel
0,2	0,5	1,9	3,1
	10	1,7	3,1
10	0,5	0,99	0,37
	10	4,3	6,4

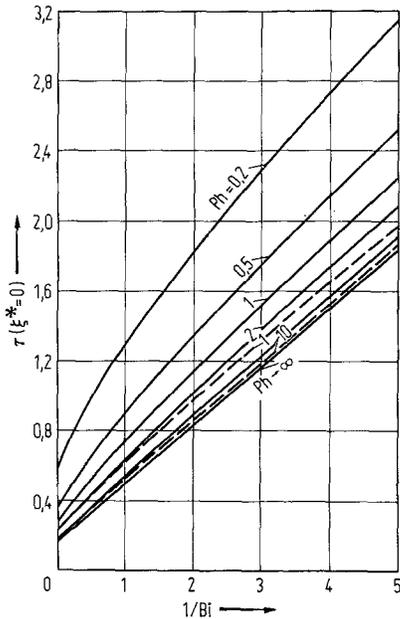


Bild 8. Erstarrungszeiten für einen kugelförmigen Körper bei endlichem Wärmeübergang und konstanter Wandtemperatur unterbrochene Kurve: Näherung nach Stephan

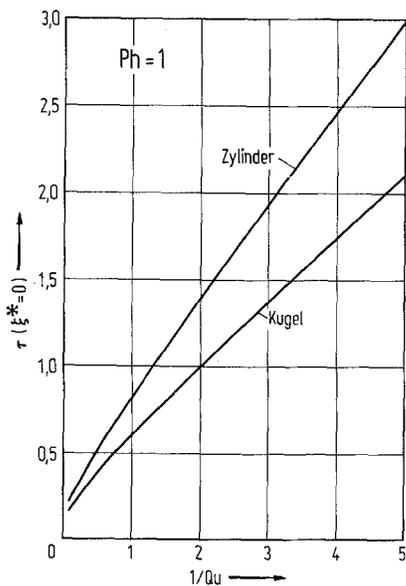


Bild 9. Erstarrungszeiten für zylinder- und kugelförmige Körper bei konstanter Wärmestromdichte

Die Bilder 10 bis 13 zeigen den Verlauf der Erstarrungsgeschwindigkeit $d\xi^*/d\tau$ über der Koordinate ξ^* .

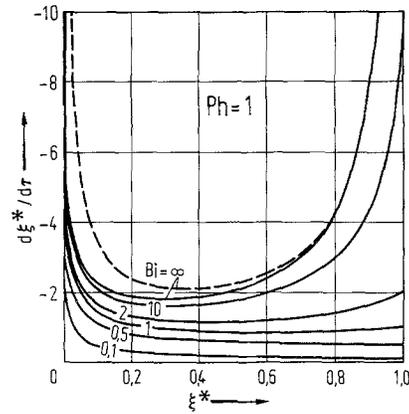


Bild 10. Erstarrungsgeschwindigkeiten eines zylindrischen Körpers bei endlichem Wärmeübergang und konstanter Wandtemperatur

unterbrochene Kurve: Näherung nach Lin für $Bi \rightarrow \infty$

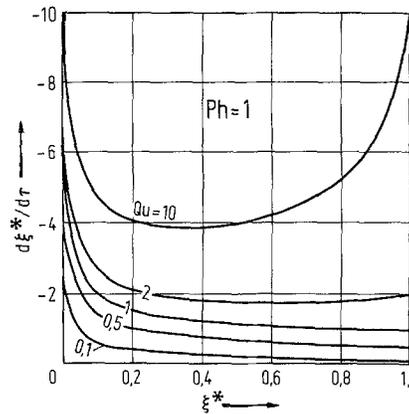


Bild 11. Erstarrungsgeschwindigkeiten eines zylindrischen Körpers bei konstanter Wärmestromdichte

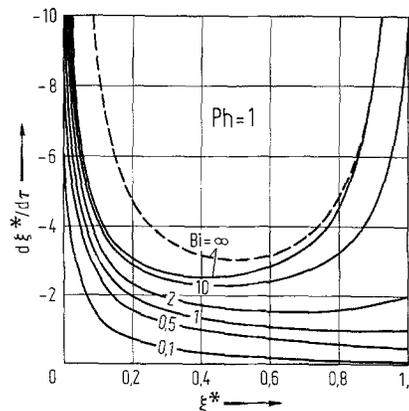


Bild 12. Erstarrungsgeschwindigkeiten eines kugelförmigen Körpers bei endlichem Wärmeübergang und konstanter Wandtemperatur

unterbrochene Kurve: Näherung nach Lin für $Bi \rightarrow \infty$

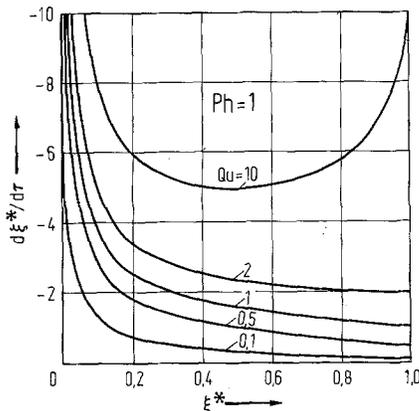


Bild 13. Erstarrungsgeschwindigkeiten eines kugelförmigen Körpers bei konstanter Wärmestromdichte

Charakteristisch für das Erstarren eines Zylinders und einer Kugel ist das Auftreten eines Minimums in der Erstarrungsgeschwindigkeit, wenn Bi oder Qu einen bestimmten Wert Bi^* oder Qu^* überschreiten. Die Erstarrung wird einerseits verlangsamt durch das Anwachsen des Wärmeleitwiderstandes mit der Schichtdicke, andererseits wird sie beschleunigt durch die Verkleinerung der Phasengrenzfläche $A(\xi^*)$. Mit zunehmenden Werten Bi oder Qu bewegt sich das Minimum näher zur Zylinderachse oder zum Kugelmittelpunkt. Bei Vergrößerung von Ph (bei endlichem Wärmeübergang) wandert es jedoch nach außen.

6. Vergleich mit Näherungslösungen

Um die Genauigkeit einiger Näherungslösungen erörtern zu können, wurden zunächst die Transformationsformeln von Lin auf die Neumann-Lösung für die ebene Platte angewandt. Als Ergebnis erhält man die unterbrochenen Kurven in den Bildern 3, 5, 10, 12.

Ein Vergleich mit der numerischen Lösung ergibt die in Tabelle 3 für verschiedene Werte Ph aufgeführten relativen Abweichungen in der Erstarrungszeit $\tau(\xi^* = 0)$ bei vollständiger Erstarrung eines Körpers und $\tau(\xi^* = 2)$ bei Erstarrung an der Außenseite. Die Abweichungen sind bei der Erstarrung an der Innenseite größer als an der Außenseite und bei der Kugel größer als beim

Tabelle 3. Transformationsformeln von Lin angewandt auf die Neumann-Lösung. Relativer Fehler in % in den Erstarrungszeiten $\tau(|\xi^* - 1| = 1)$

	$Ph =$	0,2	0,5	1	2	10
Erstarrung an der Außenseite: $\xi^* > 1$	Zylinder	10	7,0	4,6	2,8	0,7
	Kugel	23	15	9,4	5,5	1,4
Erstarrung an der Innenseite: $\xi^* < 1$	Zylinder	25	19	15	10	3,0
	Kugel	35	28	21	15	4,3

Zylinder. Während für $Ph \rightarrow \infty$ die Näherung mit der quasistationären Lösung identisch ist, nimmt der Fehler mit abnehmenden Werten der Phasenübergangszahl stark zu. Die Formeln von Lin sind demnach für kleine Werte Ph nur eine grobe Näherung.

Nach Megerlin [11] ergibt sich bei der Verwendung eines Polynoms zweiten (vierten) Grades für die Temperaturverteilung vor einer Platte konstanter Temperatur ein Fehler in der Erstarrungszeit von weniger als 4,7 % (2,5 %). Für endlichen Wärmeübergang ($Bi = 1$) findet man durch Vergleich mit der in dieser Arbeit angegebenen numerischen Lösung Abweichungen unter 1,7 % (0,5 %). In beiden Fällen tritt die größte Abweichung bei $Ph = 1$ auf.

Megerlin [11] und Stephan [12] haben ausgehend von Polynomansätzen für das ebene Problem mit Hilfe der Transformationsformeln von Lin die Erstarrungszeiten an der Außen- und Innenseite eines Zylinders und einer Kugel berechnet. Ein Vergleich mit der numerischen Lösung ergibt für $Bi \geq 1$ ebenfalls etwa die in Tabelle 3 angegebenen Fehler. Für kleinere Biot-Zahlen nimmt der Fehler ab. Der Fehler entsteht offenbar hauptsächlich durch die nur näherungsweise gültigen Formeln von Lin und bleibt daher von gleicher Größenordnung wie zuvor.

7. Abschließende Bemerkungen

Obwohl Wärmeleitvorgänge beim Erstarren wegen ihrer Bedeutung für die Technik schon vielfach untersucht wurden, ergeben bisher bekannte numerische Lösungen und Näherungslösungen erhebliche Unterschiede in den Erstarrungszeiten. Sie sind außerdem nur innerhalb bestimmter Bereiche der maßgebenden Kennzahlen und für bestimmte Randbedingungen und Körperformen gültig. In der vorliegenden Arbeit wurden daher die Erstarrungszeiten der am häufigsten vorkommenden geometrisch einfachen Körper ebene Platte, Zylinder und Kugel nach einem modifizierten Crank-Nicolson-Verfahren neu berechnet und die Ergebnisse in Form von Diagrammen systematisch zusammengestellt. Aus diesen kann man die Erstarrungszeiten der genannten einfachen Körper leicht ermitteln für die am meisten interessierende Kühlung bei konstanter Wandtemperatur, konstanter Wärmestromdichte oder bei endlichem Wärmeübergang. Wie eine Fehlerbetrachtung zeigt, weisen die Ergebnisse der numerischen Lösung eine Ungenauigkeit in der Erstarrungszeit von weniger als 10^{-4} auf. Die Abweichung von der exakten Neumann-Lösung für die Erstarrung plattenförmiger Körper ist höchstens von der Größenordnung $5 \cdot 10^{-5}$.

Die Diagramme enthalten sowohl den Fall der Erstarrung einer Flüssigkeit, die ausgehend von der Oberfläche eines Zylinders oder einer Kugel nach außen fortschreitet, wie auch den der nach innen fortschreitenden Erstarrung.

Literatur

1. Carslaw, H. S., Jaeger, J. C.: Conduction of heat in solids; Oxford at the Clarendon Press, 2. Aufl., 1959.
2. Lightfoot, N. M. H.: The solidification of molten steel; Proc. Lond. Math. Soc. 31 (1930) 2, 97/116.
3. Siegel, R.: Conformal mapping for steady two-dimensional solidification on a cold surface in flowing liquid; NASA TN D-4771, Aug. 1968.
4. Beaubouef, R. T., Chapman, A. J.: Freezing in fluids in forced flow; Int. J. Heat Mass Transfer 10 (1967) 11, 1581/1587.
5. Tao, L. C.: Generalized numerical solution of freezing a saturated liquid in cylinders and spheres; A.I.Ch.E.J. 13 (1967) 1, 165/169.
6. Stein, W. A.: Berechnung des Wärmeübergangs im Sprüh-turm; Chemie-Ing.-Techn. 43 (1971) 21, 1153/1158.
7. Cho, S. H., Sunderland, J. E.: Phase change of spherical bodies; Int. J. Heat Mass Transfer 13 (1970) 7, 1231/1233.
8. Heitz, W. L., Westwater, J. W.: Extension of the numerical method for melting and freezing problems; Int. J. Heat Mass Transfer 13 (1970) 8, 1371/1374.
9. Lazaridis, A.: A numerical solution of the multidimensional solidification (or melting) problems; Int. J. Heat Mass Transfer 13 (1970) 9, 1459/1478.
10. Stephan, K.: Influence of heat transfer on melting and solidification in forced flow; Int. J. Heat Mass Transfer 12 (1969) 2, 199/214.
11. Megerlin, F.: Geometrisch eindimensionale Wärmeleitung beim Schmelzen und Erstarren; Forsch. Ing.-Wes. 34 (1968) 2, 40/46; Diss. TH Aachen (1966).
12. Stephan, K.: Schmelzen und Erstarren geometrisch einfacher Körper; Kältetechnik-Klimatisierung 23 (1971) 2, 42/46.
13. Stein, W. A.: Eine Näherungslösung für das Erstarren von kugelförmigen Körpern; Verfahrenstechnik 5 (1971) 11, 453/455.
14. Lin, S.: Die rechnerische Behandlung von eindimensionalen instationären Wärmeleitvorgängen mit gleichzeitiger Phasen-änderung an Körpern mit Zylinder- oder Kugelsymmetrie; Diss. TH Karlsruhe (1964).
15. Siegel, R., Savino, J. M.: The analysis of the transient solidification of a flowing warm liquid on a convectively cooled wall; Proc. 3rd Int. Heat Transfer Conf., Chicago, Ill., USA, 7.-17. Aug. 1966.
16. Goodman, T. R.: The heat-balance integral and its application to problems involving a change of phase; ASME Trans. 80 (1958) 2, 335/342.
17. Siegel, R., Savino, J. M.: Transient solidification of a flowing liquid on a cold plate including heat capacities of the frozen layer and plate; ASME publ. 67-WA/HT-34, Energy Systems Exposition, Pittsburgh, Pa., 12.-17. Nov. 1967.
18. Smith, G. D.: Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen; Vieweg, Braunschweig und C. F. Winter, Basel 1970.
19. Lapidus, L.: Digital computation for chemical engineers; McGraw Hill, New York 1962.
20. Collatz, L.: The numerical treatment of differential equations; Berlin/Heidelberg/New York: Springer 1966.
21. Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker; Berlin/Heidelberg/New York: Springer 1965.
22. Longwell, P. A.: A graphical method for solution of freezing problems; A.I.Ch.E.J. 4 (1958) 1, 53/57.
23. Pechoč, V.: Generalized numerical solution of heat equation with moving boundary condition; Collection Czechoslov. Chem. Commun. 36 (1971) 3222/3235.

Prof. Dr.-Ing. K. Stephan
 Dipl.-Ing. B. Holzknecht
 Institut für Thermo- und Fluidodynamik
 Ruhr-Universität Bochum
 D-463 Bochum, Universitätsstr. 150
 (Deutschland)

Eingegangen am 8. Juli 1974