

Der Einfluß einer über dem Querschnitt unterschiedlichen Anfangstemperatur auf den Wärmeübergang in laminar durchströmten Rohren

E. HICKEN, Bochum

Zusammenfassung. Eine über dem Querschnitt unterschiedliche Anfangstemperatur kommt in der Praxis häufig vor. Diese unterschiedliche Temperaturverteilung hat einen Einfluß auf den Wärmeübergang im thermischen Einlauf. Die aus Meßergebnissen errechneten Kennzahlen können bekanntlich beträchtlich voneinander abweichen. Ein Grund dafür kann eine nicht einheitliche Temperatur im Einlaufquerschnitt sein. In dieser Untersuchung wird der Einfluß dieser unterschiedlichen Anfangstemperatur auf den Wärmeübergang in laminarer Rohrströmung errechnet.

Abstract. An initial temperature being variable above the cross-section appears in practice quite frequently. This temperature distribution influences the heat transfer in the thermal entrance region. It is known that characteristic Numbers calculated from experimental results can vary considerably. One of the reasons hereof may be a non-uniform temperature in the entrance cross section. This investigation has been made in order to calculate the influence of this variable initial temperature on the heat transfer in laminar tube flow.

Bezeichnungen

<p>a Temperaturleitfähigkeit des Fluids a_i Koeffizienten c spez. Wärmekapazität des Fluids c_n Koeffizienten D Rohrdurchmesser d_n Koeffizienten F Querschnittsfläche K_i Faktoren \dot{m} Massenstrom des Fluids $Pr = \nu/\alpha$ Prandtl-Zahl \dot{q} Wärmestromdichte \dot{Q} Wärmestrom r Abstand von der Rohrachse $r_0 = D/2$ halber Rohrdurchmesser $r^* = r/r_0$ dimensionslose radiale Koordinate $Re = \bar{u} D/\nu$ Reynolds-Zahl R_n Eigenfunktion t Temperatur u örtliche Geschwindigkeit</p>	<p>\bar{u} mittlere Geschwindigkeit z Koordinate in Strömungsrichtung λ Wärmeleitfähigkeit des Fluids λ_n Eigenwert ν kinematische Viskosität des Fluids ϑ_T reduzierte Temperatur nach Gl. (2) ϑ_q reduzierte Temperatur nach Gl. (3) $\vartheta_{T,m}^*$ dimensionslose Mitteltemperatur nach Gl. (8) Θ_{w-m} Kennzahl nach Gl. (10) ρ Dichte des Fluids</p>
Indizes	
<p>0 m q T w ∞</p>	<p>$z = 0$ Mittel konstante Wärmestromdichte konstante Wandtemperatur Wand unendlich, ausgebildet</p>

Einführung und Aufgabenstellung

Bei theoretischen Berechnungen des Wärmeübergangs in laminar durchströmten Kanälen wird eine über dem Querschnitt konstante Anfangstemperatur vorausgesetzt. Diese Annahme vereinfacht die Berechnungen; in der Praxis können jedoch von einer konstanten Einlauftemperatur abweichende Temperaturprofile vorliegen, die den Wärmeübergang im Kanal beeinflussen. Die aus verschiedenen Versuchen errechneten Kennzahlen für den Wärmeübergang können daher schon aus diesem Grunde voneinander abweichen. Es soll nun die Aufgabe dieser Untersuchung sein, den Einfluß unterschiedlicher rotationssymmetrischer Anfangstemperatur-Profile auf den Wärmeübergang im thermischen Einlauf eines laminar durchströmten Rohres zu ermitteln. Dabei wird stets eine hydrodynamisch ausgebildete Strömung vorausgesetzt.

Aus der Vielzahl der möglichen thermischen Randbedingungen werden zwei ausgewählt: der Wärmeübergang bei konstanter Wandtemperatur t_w und bei konstanter Wärmestromdichte \dot{q}_w an der Wand. In

Bild 1 sind der Verlauf der Mitteltemperatur t_m des Fluids und der Wandtemperatur t_w sowie die Temperaturprofile im Rohreinlauf schematisch dargestellt. Die Mitteltemperatur t_m ergibt sich in jedem Querschnitt zu

$$t_m = \frac{1}{F} \int_{(F)} (u/\bar{u}) t \, dF \quad (1)$$

aus der Temperatur t , der Querschnittsfläche F , der örtlichen Strömungsgeschwindigkeit u und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit \bar{u} . Die Stoffwerte des Fluids sollen temperaturunabhängig sein. In Bild 1 bedeuten r den Abstand von der Rohrachse, r_0 den halben Rohrdurchmesser $D/2$ und z die Koordinate in Strömungsrichtung.

Es ist üblich, für den Wärmeübergang bei konstanter Wandtemperatur (Bild 1) die folgende reduzierte Temperatur

$$\vartheta_T = \frac{t - t_w}{t_{m,0} - t_w} \quad (2)$$

einzuführen. Hierbei ist $t_{m,0}$ die Strömungsmitteltemperatur im Einlaufquerschnitt $z = 0$. Die Grenzwerte sind $\vartheta_{T,m,0} = 1$ und $\vartheta_{T,\infty} = 0$. Ist die Wärme-

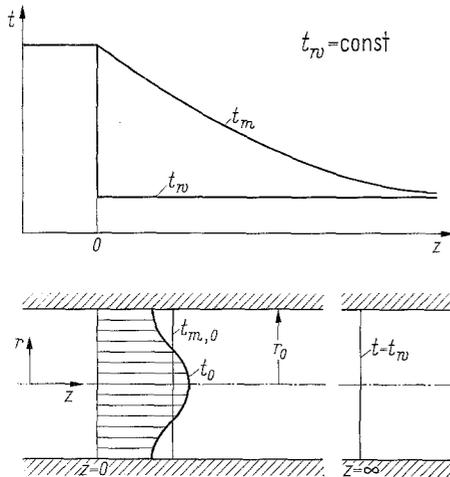


Bild 1. Temperaturverlauf im Rohr bei einer konstanten Wandtemperatur in axialer Richtung.

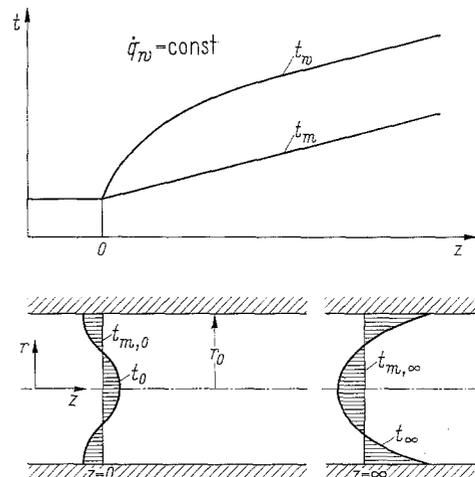


Bild 2. Temperaturverlauf im Rohr bei einer konstanten Wärmestromdichte an der Wand.

stromdichte an der Wand konstant und unabhängig von der Längskoordinate z , vgl. Bild 2, so empfiehlt sich die folgende Reduzierung

$$\vartheta_q = \frac{t - t_{m,0}}{\dot{q}_w r_0 / \lambda} \quad (3)$$

mit der Wärmestromdichte \dot{q}_w an der Wand und der Wärmeleitfähigkeit λ des Fluids. Da dem Fluid für $z < 0$ keine Wärme zugeführt werden soll, gilt außerdem in beiden Fällen

$$\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=r_0} = 0 \quad \text{für } z < 0. \quad (4)$$

Die Berechnung des Temperaturfeldes im thermischen Einlauf

Der übliche Rechengang bei der Lösung der Differentialgleichung für das Temperaturfeld im strömenden Medium ist in Tabelle 1 angegeben. Es wird das Verfahren der Trennung der Veränderlichen angewendet, vgl. z. B. [1], [2], [3]. Die von der radialen Koordinate $r^* = r/r_0$ abhängigen Eigenfunktionen $R_n(r^*)$ und die Eigenwerte λ_n hängen dabei nur von den Randbedingungen bei $r^* = 1$ ab. Die Koeffizienten c_n dagegen werden durch das Temperaturprofil im Einlauf bei $z = 0$ bestimmt. Daraus folgt für das Problem dieser Untersuchung, daß die Eigenwerte und Eigenfunktionen für unterschiedliche Temperaturprofile im Rohreinlauf unverändert bleiben; nur die mit beträchtlich geringerem Aufwand errechenbaren Koeffizienten c_n brauchen geändert zu werden.

Da das rotationssymmetrische Temperaturfeld am Rohranfang $z = 0$ eine stetige Funktion der radialen Koordinate r^* ist, kann jede derartige Temperaturverteilung durch den folgenden Ansatz dargestellt werden:

$$\vartheta(r^*, 0) = \vartheta_{m,0} + \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} K_j [\cos(j\pi r^*) + a_j]. \quad (5)$$

Gl. (5) erfüllt die Randbedingung Gl. (4). Wendet man

Gl. (1) im Einlaufquerschnitt $z = 0$ an, so erhält man die Bedingung

$$4 \int_0^1 r^* (1 - r^{*2}) \cos(j\pi r^*) dr^* + a_j = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

aus der sich die Koeffizienten a_j berechnen lassen. Einige Werte für a_j enthalten Tabelle 2 und 3.

Der Rechengang zur Ermittlung der Koeffizienten c_n ist in Tabelle 1 angegeben.

Dimensionslose Kennzahlen für den Wärmeübergang

Bei einer vorgegebenen Wandtemperatur $t_w(z)$ interessiert in der Regel der übertragene Wärmestrom \dot{Q} , der wie folgt ermittelt werden kann:

$$\dot{Q}(z) = \dot{m} c [t_m(z) - t_{m,0}] \quad (7)$$

mit \dot{m} als dem Massenstrom des Fluids und c als seiner spez. Wärmekapazität. Bei einer in axialer Richtung konstanten Wandtemperatur kann die Mitteltemperatur in dimensionsloser Schreibweise

$$\vartheta_{T,m}^*(z) = \frac{t_m(z) - t_{m,0}}{t_w - t_{m,0}} \quad (8)$$

in Gestalt einer unendlichen Reihe dargestellt werden, vgl. Tabelle 1, Gl. (T 17). Damit folgt mit Gl. (8) aus Gl. (7)

$$\dot{Q}(z) = \dot{m} c (t_w - t_{m,0}) \vartheta_{T,m}^*(z). \quad (9)$$

Es sei hinzugefügt, daß auch die üblicherweise benutzten Nusselt-Zahlen aus der dimensionslosen Mitteltemperatur $\vartheta_{T,m}^*(z)$ bestimmt werden können, vgl. z. B. [4, S. 82].

Wird dagegen die Wärmestromdichte \dot{q}_w an der Wand vorgeschrieben, so läßt sich die Mitteltemperatur $t_m(z)$ aus einer Energiebilanz ermitteln. Von Bedeutung ist dann nur die Wandtemperatur $t_w(z)$. Eine vorteilhafte Kennzahl für die Differenz zwischen der

Wandtemperatur und der Mitteltemperatur, vgl. [3], ist

$$\Theta_{w-m}(z) = \frac{t_w(z) - t_m(z)}{\dot{q}_w D/\lambda} \quad (10)$$

Diese Kennzahl ist der Kehrwert der örtlichen Nusselt-Zahl. Die Reihe für die Kennzahl Θ_{w-m} ist in Tabelle 1, Gl. (T 18), angegeben.

Für $K_j = 0$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) gehen Gl. (T 17) und Gl. (T 18) in die bisher bekannten Beziehungen über. Man kann die zusätzlichen Glieder als ein Temperaturfeld auffassen, das dem bisher bekannten überlagert wird.

Die Koeffizienten für Gl. (T 17) und Gl. (T 18) sind für $j = 1$ bis 4 in Tabelle 2 und 3 angegeben.

Tabelle 1. Ermittlung des Wärmeübergangs im thermischen Einlauf eines Rohres bei ausgebildeter laminarer Strömung

Thermische Randbedingung	
$t_w = \text{const.} \quad \quad \dot{q}_w = \text{const.}$	
Differentialgleichung für das Temperaturprofil im strömenden Fluid	
$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \rho c u \frac{\partial t}{\partial z} \quad (T 1)$	
Das ausgebildete Temperaturprofil für $z \rightarrow \infty$	
$\vartheta_{T,\infty} = 0 \quad (T 2)$	$\vartheta_{q,\infty} = \frac{8z}{Re Pr D} + r^{*2} - \frac{1}{4} r^{*4} - \frac{7}{24} \quad (T 3)$
Ansätze für das Temperaturprofil im thermischen Einlauf	
$\vartheta_T = \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} c_{n,T} R_{n,T}(r^*) \exp\left(-\lambda_{n,T}^2 2 \frac{z}{Re Pr D}\right) \quad (T 4)$	$\vartheta_q = \vartheta_{q,\infty} + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} c_{n,q} R_{n,q}(r^*) \exp\left(-\lambda_{n,q}^2 2 \frac{z}{Re Pr D}\right) \quad (T 5)$
Differentialgleichung für die Eigenfunktionen R_n und die Eigenwerte λ_n	
$\frac{d^2 R_n}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{dR_n}{dr^*} + \lambda_n^2 R_n(1 - r^{*2}) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (T 6)$	
Randbedingungen	
$\vartheta_T(r^* = 1) = 0, \left(\frac{\partial \vartheta_T}{\partial r^*}\right)_{r^*=0} = 0$	$\left(\frac{\partial \vartheta_q}{\partial r^*}\right)_{r^*=1} = 1, \left(\frac{\partial \vartheta_q}{\partial r^*}\right)_{r^*=0} = 0$
$R_{n,T}(r^* = 1) = 0, \left(\frac{dR_{n,T}}{dr^*}\right)_{r^*=0} = 0 \quad (T 7)$	$\left(\frac{dR_{n,q}}{dr^*}\right)_{r^*=1} = 0, \left(\frac{dR_{n,q}}{dr^*}\right)_{r^*=0} = 0 \quad (T 8)$
Anfangsbedingungen bei $z = 0$	
$\vartheta_{T,0} = 1 + \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} K_j [\cos(j\pi r^*) + a_j] \quad (T 9)$	$\vartheta_{q,0} = \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} K_j [\cos(j\pi r^*) + a_j] \quad (T 10)$
Berechnung der Koeffizienten c_n	
$c_{n,T} = c_{n,T}^* + \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} K_j c_{n,j,T} \quad (T 11)$	$c_{n,q} = c_{n,q}^* + \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} K_j c_{n,j,q} \quad (T 14)$
mit	mit
$c_{n,T}^* = \frac{\int_0^1 r^*(1 - r^{*2}) R_{n,T} dr^*}{\int_0^1 r^*(1 - r^{*2}) R_{n,T}^2 dr^*} \quad (T 12)$	$c_{n,q}^* = - \frac{\int_0^1 r^*(1 - r^{*2}) R_{n,q} (\vartheta_{q,\infty} - \vartheta_{q,m}) dr^*}{\int_0^1 r^*(1 - r^{*2}) R_{n,q}^2 dr^*} \quad (T 15)$
und	und
$c_{n,j,T} = \frac{\int_0^1 r^*(1 - r^{*2}) R_{n,T} [\cos(j\pi r^*) + a_j] dr^*}{\int_0^1 r^*(1 - r^{*2}) R_{n,T}^2 dr^*} \quad (T 13)$	$c_{n,j,q} = \frac{\int_0^1 r^*(1 - r^{*2}) R_{n,q} [\cos(j\pi r^*) + a_j] dr^*}{\int_0^1 r^*(1 - r^{*2}) R_{n,q}^2 dr^*} \quad (T 16)$
Dimensionslose Kennzahlen für den Wärmeübergang	
$\vartheta_{T,m}(z) = \frac{t_m(z) - t_{m,0}}{t_w - t_{m,0}} = 1 - \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} d_{n,T} \left(1 + \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} K_j \frac{c_{n,j,T}}{c_{n,T}^*} \right) \cdot \exp\left(-\lambda_{n,T}^2 2 \frac{z}{Re Pr D}\right) \quad (T 17)$	$\Theta_{w-m}(z) = \frac{t_w(z) - t_m(z)}{\dot{q}_w D/\lambda} = 0,5 \left[\frac{11}{24} + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(1 + \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} K_j \frac{c_{n,j,q}}{c_{n,q}^*} \right) \cdot c_{n,q}^* R_{n,q}(1) \exp\left(-\lambda_{n,q}^2 2 \frac{z}{Re Pr D}\right) \right] \quad (T 18)$

Tabelle 2. Koeffizienten für Gl. (T 17)

n		1	2	3	4	5	6
$\lambda_{n,T}^2$		7,313587	44,60945	113,9210	215,2405	348,564	513,890
$c_{n,T}^*$		+1,476435	-0,806124	+0,588762	-0,475850	+0,40502	-0,35576
$d_{n,T}$		+0,819050	+0,097527	+0,032504	+0,015440	+0,00879	+0,00558
$j = 1$ $a_1 = +0,087482$	$c_{n,1,T}$	+0,402572	+1,09289	-0,70110	+0,52583	-0,4280	+0,3665
$j = 2$ $a_2 = +0,303964$	$c_{n,2,T}$	-0,098642	+0,78787	+1,13227	-0,92497	+0,7417	-0,6175
$j = 3$ $a_3 = -0,038948$	$c_{n,3,T}$	-0,196876	-0,73204	+1,71339	+0,54452	-0,7111	+0,6434
$j = 4$ $a_4 = +0,075991$	$c_{n,4,T}$	+0,031882	-0,39824	-0,61122	+2,28445	-0,0286	-0,4884

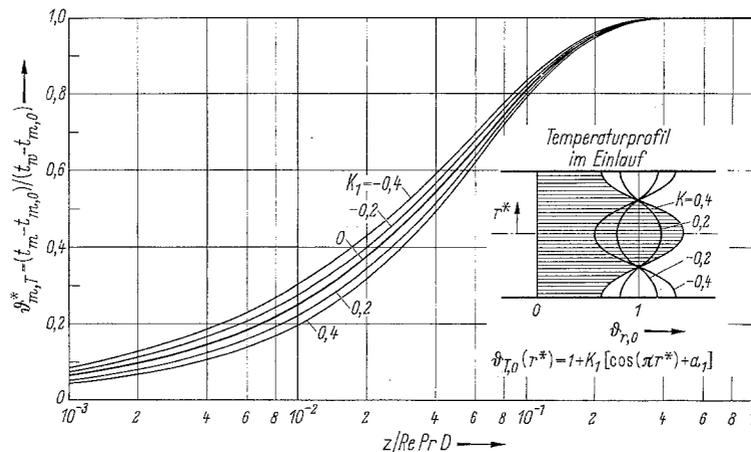


Bild 3. Die Beeinflussung des Wärmeübergangs im thermischen Einlauf eines laminar durchströmten Rohres durch unterschiedliche Anfangstemperatur-Profile; die thermische Randbedingung ist $t_w = \text{const.}$

Ergebnisse

Als Beispiel sind in Bild 3 und Bild 4 für $j = 1$ mit K_1 als Parameter Ergebnisse der Wärmeübergangsberechnungen im thermischen Einlauf dargestellt. Sie zeigen den Einfluß einer nicht konstanten Anfangstemperaturverteilung. Die relativen Abweichungen der Kennzahlen $\vartheta_{m,T}^*$ und Θ_{w-m} für $K_1 \neq 0$ von den bei konstanter Einlaufstemperatur ermittelten Kennzahlen (für $K_1 = 0$) sind für kleine Werte der dimensionslosen Entfernung $z / (Re Pr D)$ vom Einlauf am größten; für große Entfernungen vom Einlauf werden die Abweichungen klein. Als Beispiel für den Einfluß der Einlauf-Temperaturverteilung sei die Stelle $z / (Re Pr D) = 10^{-2}$ für die thermische Randbedingung $t_w = \text{const.}$ näher untersucht, vgl. Bild 3. In diesem Querschnitt ist die Mitteltemperatur für $K_1 = 0,20$ um 9% geringer als für $K_1 = 0$. Wollte man nun für $K_1 = 0,20$ die

gleiche Mitteltemperatur wie für $K_1 = 0$ an der Stelle $z / (Re Pr D) = 10^{-2}$ erhalten, so wäre ein um ca. 20% verlängertes Rohr notwendig. Die in der Literatur angegebene Streuung der Wärmeübergangsmessungen könnte gelegentlich auch mit einer unterschiedlichen Temperaturverteilung im Rohreinlauf erklärt werden.

In dieser Untersuchung wurde eine hydrodynamisch ausgebildete Strömung vorausgesetzt. Den Einfluß einer hydrodynamisch nicht ausgebildeten Strömung auf den Wärmeübergang im Rohr untersuchte E. BENDER [4]; in der Regel wird der Wärmeübergang im thermischen Einlauf verbessert. In der Praxis werden beide Einflüsse, nämlich die einer hydrodynamisch nicht ausgebildeten Strömung und einer nicht konstanten Einlauf-Temperaturverteilung, von Bedeutung sein; ihr gegenseitiger Einfluß läßt sich jedoch schwer abschätzen.

Tabelle 3. Koeffizienten für Gl. (T 18)

n	1	2	3	4	
$\lambda_{n,q}^2$	25,6796	83,8618	174,167	296,536	
$c_{n,q}^*$	+0,403483	-0,175111	+0,105594	-0,07328	
$R_{n,q}(1)$	-0,492517	+0,395508	-0,345872	+0,31405	
$j = 1$ $a_1 = +0,087482$	$c_{n,1,q}$	+1,31224	-0,31698	+0,14197	-0,08055
$j = 2$ $a_2 = +0,303964$	$c_{n,2,q}$	+0,072985	+1,71126	-0,72396	+0,38968
$j = 3$ $a_3 = -0,038948$	$c_{n,3,q}$	-0,765822	+0,63945	+1,74133	-1,04776
$j = 4$ $a_4 = +0,075991$	$c_{n,4,q}$	-0,056402	-0,95528	+1,33984	+1,45635

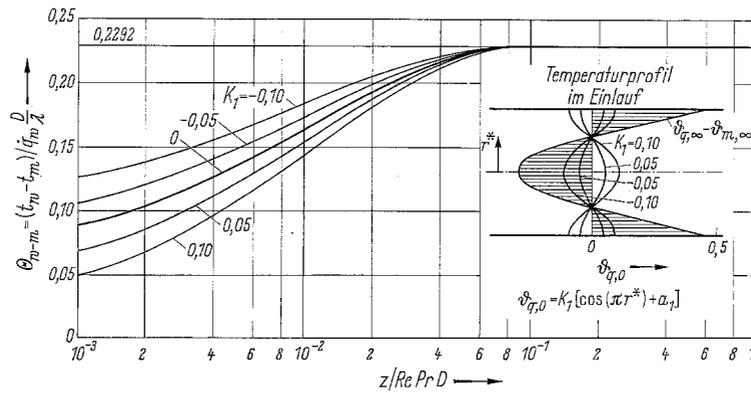


Bild 4. Die Beeinflussung des Wärmeübergangs im thermischen Einlauf eines laminar durchströmten Rohres durch unterschiedliche Anfangstemperatur-Profile; die thermische Randbedingung ist $\dot{q}_w = \text{const.}$

Literatur

[1] SIEGEL, R., E. M. SPARROW and T. M. HALLMAN: Steady laminar heat transfer in a circular tube with prescribed wall heat flux. J. Appl. Sci. Res. Vol. A 7 (1958) pp. 386/392.
 [2] BROWN, G. M.: Heat or mass transfer in a fluid in laminar flow in a circular or a flat duct. J. Amer. Inst. Chem. Engrs. Vol. 6 (1960) pp. 179/183.
 [3] HICKEN, E.: Wärmeübergang bei ausgebildeter laminarer Kanalströmung für am Umfang veränderliche Randbedingungen. Diss. Techn. Hochschule Braunschweig, 1966.

[4] BENDER, E.: Wärmeübergang bei laminarer Rohrströmung mit temperaturabhängigen Stoffwerten unter verschiedenen Anfangs- und Randbedingungen. Diss. Techn. Hochschule Braunschweig, 1967.

Dr.-Ing. E. HICKEN
 Institut für Thermo- und Fluidynamik der
 Ruhr-Universität Bochum

Manuskript eingegangen am 15. Juli 1968